Corrigés des exercices 2.1 à 2.7 : حلول التمارين من 1.2 إلى 7.2

Exercice2.1 :

a/ $\boxed{\vec{V_1} = 6,40}$, $\boxed{\vec{V_2} = 5,38}$, $\boxed{\vec{V_3} = 5,91}$

b/ $\boxed{\vec{A} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$, $\boxed{\vec{B} = 9\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k}}$

c/ $\boxed{\vec{C} = 8\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}}$ $\quad \dfrac{\vec{C}}{C} = \vec{u}_c \Rightarrow \boxed{\vec{u}_c = \dfrac{8}{\sqrt{35}}\vec{i} - \dfrac{5}{\sqrt{35}}\vec{j} + \dfrac{7}{\sqrt{35}}\vec{k}}$

d/
$$\vec{V}_1.\vec{V}_3 = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_3 = 15 + 4 + 12 \ , \ \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_3 = 31}$$
$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_3}{V_1V_3} \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{31}{\sqrt{41}.\sqrt{35}} = \frac{31}{37,88} \ , \ cos\alpha \simeq 0,176 \Rightarrow \boxed{\alpha = 79,86°}$$

e/ $\boxed{\vec{V_2} \wedge \vec{V}_3 = 5\vec{i} - 26\vec{j} - 17\vec{k}}$

Exercice2.2 :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \ ; \ \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$
$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$
$$S = \left[(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2 \right]^{1/2}$$
$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k}$$
$$D = \left[(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \right]^{1/2}$$

Exercice2.3 :

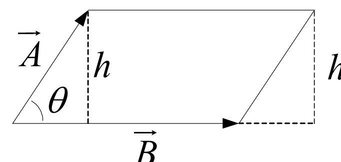
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \ , \ \vec{V} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \boxed{V \simeq 8,54}$$
$$V_x = V.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_x}{V} = \frac{6}{8,54} \ , \ cos\alpha \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 45,6°}$$
$$V_y = V.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{V_y}{V} = \frac{6}{8,54} \ , \ cos\beta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\beta \simeq 45,6°}$$
$$V_z = V.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{V_z}{V} = \frac{1}{8,54} \ , \ cos\theta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\theta \simeq 83,1°}$$

Exercice2.4 :

a/ surface du parallélogramme : $S = h.\left|\vec{B}\right|$

On remarque sur la figure que : $h = \left|\vec{A}\right| \sin\theta$

Donc : $S = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$



On en déduit que : $S = \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$

Rappelons-nous que la surface d'un triangle de côtés $\left|\vec{A}\right|$ et $\left|\vec{B}\right|$ est égale à :

$$S_0 = \frac{1}{2}\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

b/ soient les deux vecteurs :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

En égalisant les deux dernières expressions, et en développant nous arrivons au résultat : $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$, qui n'est autre que le produit scalaire $\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$.

Exercice2.5 :

Ecrivons les deux expressions des deux vecteurs :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 2y \\ 2xz^2 - 2 \end{pmatrix}$$

En calculant le produit vectoriel de ces deux vecteurs nous trouvons que le résultat est zéro :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 2xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Exercice2.6 :

Pour que les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient parallèles il faut que la relation $\vec{B} = \lambda.\vec{A}$ soit vérifiée, avec λ constante.

Partant de cela on peut écrire :

$$\frac{\vec{B}}{\lambda} = \vec{A} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-3}{\lambda} \\ \frac{4}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

On en déduit la valeur de λ et par la suite les valeurs de α et β :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{\lambda}=1 \Rightarrow \boxed{\lambda=2} \\ \dfrac{-3}{\lambda}=\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha=-1,5} \\ \dfrac{4}{\lambda}=\beta \Rightarrow \boxed{\beta=2} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{B}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On s'assure des deux résultats en calculant $\vec{A} \wedge \vec{B}=\vec{0}$

Les vecteurs unitaires correspondant à chacun des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont :

$$\boxed{\vec{A}=\vec{i}-1,5\vec{j}+2\vec{k}} \quad \frac{\vec{A}}{A}=\vec{u}_A \Rightarrow \boxed{\vec{u}_A=\frac{1}{\sqrt{7,25}}\vec{i}-\frac{1,5}{\sqrt{7,25}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{7,25}}\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{B}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}} \quad \frac{\vec{B}}{B}=\vec{u}_B \Rightarrow \boxed{\vec{u}_B=\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}}$$

<u>Exercice2.7</u> :

Des données nous pouvons en déduire que l'angle entre les deux vecteurs est :

$$180-(25+50)=105°$$

Appliquons la formule **2.9** pour trouver les deux composantes :

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50}=\frac{V_y}{\sin 25}$$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50} \Rightarrow \boxed{V_x=\frac{\sin 50}{\sin 105°}V} \Rightarrow \boxed{V_x=23,8}$$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_y}{\sin 25} \Rightarrow \boxed{V_y=\frac{\sin 25}{\sin 105°}V} \Rightarrow \boxed{V_y=13,1}$$